Università degli Studi di Palermo
Scuola Interuniversitaria Siciliana di Specializzazione
Per l'insegnamento Secondario
Anno accademico 2000/2001

Laboratorio di analisi numerica
Prof. Arena

UNITA' DIDATTICHE:

RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI
INTERPOLAZIONE

di

MARIA ROSA DI VERDE (classe 047A)
MONICA MATRANGA (classe 047A)
MARIA ROSARIA MELI (classe 047A)

UNITA’ DIDATTICA
RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI

IL CONTESTO

La seguente unità didattica, avente come oggetto la risoluzione approssimata di equazioni algebriche e trascendenti, è inserita all’interno di un modulo di elementi di analisi numerica, rivolto ad una classe quinta di liceo scientifico ad indirizzo sperimentale. L’unità didattica in questione è preceduta da un’unità dedicata alla teoria degli errori ed è seguita da un’unità avente come tema la teoria ed i metodi di interpolazione.

LE MOTIVAZIONI

L’esigenza di presentare strumenti e metodi del calcolo numerico nasce dal considerare utile e formativo per gli allievi conoscere la possibilità di risolvere numericamente parecchi problemi non altrimenti risolubili con le tecniche operazionali del calcolo algebrico.

Storicamente, l’interesse per lo studio di questioni riguardanti il calcolo delle soluzioni approssimate di un’equazione ebbe il suo maggiore sviluppo a partire dal '700, e vide impegnati matematici prestigiosi come Newton, Lagrange, Hermite e Gauss, i quali elaborarono procedure di risoluzione numerica di interesse certamente rilevante ma, a volte, eccessivamente complesse per la lunghezza e laboriosità dei calcoli. Oggi, l’interesse per lo studio di questi metodi ritrova grande attualità perché, prestandosi essi ad una traduzione informatica, ben si inseriscono nell’ambito della disciplina che studia e sviluppa le possibilità di esecuzione dei calcoli algebrici sui calcolatori elettronici.

Gli argomenti trattati consentiranno pertanto di dedicare cura e attenzione particolare allo svolgimento dell’attività laboratoriale, nella consapevolezza che la ricerca scientifica e lo sviluppo tecnologico richiedono ai giovani, alla soglia degli studi universitari o dell’ingresso nel mondo del lavoro, conoscenze sempre più approfondite e specifiche dei concetti teorici e di procedimenti applicativi della matematica. L’inserimento delle nuove tecnologie dell’informazione nella scuola è già una realtà, per cui ogni individuo deve strutturare le proprie abilità cognitive e le proprie competenze in modo da essere continuamente in sintonia con l’evoluzione, per potere cogliere le potenzialità di tali strumenti e le opportunità positive che essi offrono.

PREREQUISITI

Per lo studio degli argomenti trattati in questa unità si ritengono necessari i seguenti prerequisiti cognitivi ed operazionali:

- padroneggiare le tecniche del calcolo letterale;
- aver acquisito il concetto di funzione di una sola variabile;
- sapere riconoscere e distinguere funzioni algebriche, trigonometriche, logaritmiche, esponenziali, trascendenti miste;
- avere assimilato le nozioni fondamentali dell'analisi infinitesimale per le funzioni di una variabile;
- sapere studiare una funzione ed essere capace di rappresentarla in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale;
- sapere definire ed avere compreso il concetto di successione numerica;
- possedere gli strumenti analitici della geometria;
- aver appreso gli elementi della teoria degli errori;
- saper valutare gli errori per conoscere la bontà dell'approssimazione;
- saper far uso del foglio di calcolo elettronico.

OBIETTIVI

Lo studio degli argomenti si prefigge i seguenti obiettivi:

- comprendere l'utilità dei metodi di approssimazione;
- sapere individuare in quali casi ha senso ricorrere ai metodi di approssimazione;
- acquisire i metodi di approssimazione proposti nell'unità;
- comprendere la diversità degli algoritmi per l'approssimazione;
- acquisire competenze per confrontare i diversi algoritmi e valutarne la bontà;
- sapere utilizzare il foglio di calcolo elettronico per risolvere gli esercizi dell'unità didattica.

FINALITA'

- Riflettere sull'efficacia e sull'efficienza dei metodi algoritmici;
- Potenziare le capacità di intuizione e comparazione per utilizzare metodi diversi;
- Stimolare la riflessione sulle potenzialità della matematica in generale ed in relazione allo sviluppo tecnologico.

STRUMENTI

Gli allievi dovranno avvalersi essenzialmente degli strumenti didattici tradizionali quali libri adottati e consigliati. Essenziale e particolarmente coinvolgente e produttivo risulterà l'integrazione della trasposizione dei contenuti con l'utilizzo delle apparecchiature informatiche durante le ore di lezione dedicate all'attività di laboratorio. L'ausilio di strumenti informatici si ritiene particolarmente utile, poiché consente di mostrare come sia possibile pervenire a soluzioni in tempo ragionevole e senza errori di calcolo.

METODOLOGIE ED ATTIVITA' DI RECUPERO

Saranno condotte delle lezioni frontali in modo da suscitare l'interesse e la partecipazione degli allievi, rendendoli consapevoli del fatto che gli argomenti in questione non possono essere soltanto ricordati e ripetuti, ma vanno assimilati al fine di una manipolazione in termini di applicazione informatica. Si proporrà quindi l'utilizzo di un foglio elettronico in ambiente Excel per ciascun argomento trattato, mostrando alcuni esempi ed assegnando degli esercizi, i cui risultati, elaborati dal calcolatore, possano essere interpretati dagli allievi per meglio comprendere l'efficienza delle diverse tecniche risolutive.

Per colmare lacune rilevate in seguito alla somministrazione di un test di verifica, si interromperà l'azione didattica e saranno riservate alcune ore sia al recupero che al potenziamento. A seconda delle situazioni da recuperare che si presenteranno, saranno svolte lezioni individuali per i casi più gravi, mentre per quelli meno gravi si terranno lezioni in cui gli allievi che hanno raggiunto gli obiettivi prefissati fungeranno da tutor dei compagni che mostrano difficoltà.

CONTENUTI E PERCORSO DIDATTICO

Volendo esporre sommariamente il percorso didattico si può dire che esso consisterà nel presentare alcuni metodi di approssimazione, mettendo in evidenza come la ricerca dei valori approssimati delle radici reali di un'equazione si possa effettuare in due passi successivi:

- *separazione delle radici*, che consiste nel determinare gli intervalli della retta reale che contengono una sola radice;
- *calcolo del valore approssimato della radice dell'equazione* secondo un'approssimazione prefissata che si può ulteriormente migliorare.

In particolare, per quanto riguarda la separazione delle soluzioni si presenteranno i metodi grafico ed analitico. Per procedere poi alla loro approssimazione, prenderemo in considerazione i metodi:

- di bisezione o dicotomico;
- delle secanti o delle corde;
- di Newton o delle tangenti;
- combinato;
- di iterazione.

Poiché si hanno a disposizione quattro ore settimanali, saranno necessarie non meno di otto lezioni di due ore ciascuna, comprendenti attività di laboratorio cui aggiungere due interventi di recupero e verifiche ed un numero di esercitazioni laboratoriali definibili solo in corso d'opera.

≈≈≈≈≈

La prima lezione si aprirà fornendo alcune notazioni di tipo storico e facendo notare come la ricerca delle radici di un'equazione algebrica o trascendente $f(x) = 0$ presenta, in generale, grande difficoltà, e solo raramente è possibile determinare i valori reali esatti x che soddisfano l'equazione. Infatti, non solo esistono equazioni particolarmente complicate, ma può anche capitare che i coefficienti non siano noti se non approssimativamente; in tal caso, perde senso lo stesso problema della determinazione precisa delle radici.

Data pertanto l'equazione

$$f(x) = 0$$

dove la funzione $y = f(x)$ è definita e continua in un certo intervallo $[a, b]$ della retta reale, il primo obiettivo sarà quello di isolare una radice reale, nel caso in cui esista, e darne un'approssimazione.

Il problema più semplice si presenta quando la funzione è un polinomio. In questo caso l'equazione sarà di tipo algebrico, ovvero sarà del tipo

$$f(x) = a_o x^n + \ \dots + a_n \ , \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad 0 \le i \le n.$$

Se la determinazione degli zeri reali di un'equazione siffatta è, come ben noto, algoritmicamente possibile per polinomi di grado al più quattro, lo stesso non può dirsi per polinomi di grado maggiore.

Uno dei più grandi successi della matematica moderna è, infatti, la dimostrazione dovuta ad Abel[1] secondo cui non esiste un algoritmo che calcoli tutti gli zeri reali di un polinomio di grado maggiore o uguale a cinque.

Prima di passare alla presentazione dei metodi numerici per l'approssimazione degli zeri reali di polinomi in una sola variabile, si ritiene utile far conoscere un risultato classico noto come

Teorema dell'algebra di Sturm (1835),

il quale permette di calcolare il numero esatto degli zeri reali del polinomio dato in un intervallo assegnato della retta reale. Esso può essere enunciato schematicamente nel seguente modo.

Sia

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots + a_1 x + a_o = 0$$

un'equazione algebrica di grado n qualunque che indichiamo con $f_o(x)$.

Sia $f_1(x)$ la derivata dell'espressione $f_o(x)$.

[1] Matematico norvegese (1802-1829), acquistò nome imperituro per i suoi lavori sulle equazioni algebriche, sulle funzioni e sugli integrali ellittici.

L'algoritmo della divisione di Euclide applicato a f_o e f_1 consente di scrivere

$$f_o(x) = f_1(x)q_1(x) + r_1(x)$$

Ponendo $f_2(x) = - r_1(x)$ si avrà $f_o = f_1 q_1 - f_2$.

Applicando nuovamente l'algoritmo di Euclide a f_1 e f_2 e cambiando il segno del resto di r_2 si ottiene: $f_1 = f_2 q_2 - f_3$.

Si procede dunque ricorsivamente. Se f_o e f_1 non hanno radici comuni (caso al quale ci si può sempre ricondurre), si perviene ad un'altra equazione: $f_{r-2} = f_{r-1}q_{r-1} - f_r$ con $r \leq n$. Essendo f_r una costante numerica si è in tal modo costruita una successione di funzioni polinomiali $f_o, f_1, \ldots, f_r$.

Fissati a e b, $(a < b)$, valutiamo $f_o(a), f_1(a), \ldots, f_r(a)$ e $f_0(b), f_1(b), \ldots, f_r(b)$ e consideriamo la successione dei segni. Si dimostra che il numero degli zeri reali dell'equazione $f(x) = 0$ è dato dalla differenza $|V(a) - V(b)|$, dove $V(a)$ e $V(b)$ sono rispettivamente il numero delle variazioni di segno su a e su b.

Proporremo allora il seguente

~~~~~

<u>ESEMPIO 1</u>

Sia $f(x) = x^3 - 2x - 2$

Poniamo $f(x) = f_o(x)$ e $f_1(x) = f'(x) = 3x^2 - 2$

Dividiamo $f_o(x)$ per $f_1(x)$

$$\begin{array}{ll|l}
x^3 & -2x - 2 & 3x^2 - 2 \\ \cline{3-3}
-x^3 & +(2/3)x & (1/3)x \\ \cline{1-2}
// & -(4/3)x - 2 &
\end{array}$$

Quindi $f_0(x) = f_1(x)q_1(x) + r_1(x) = (3x^2 - 2)(1/3)x - (4/3)x - 2$.

Ponendo $f_2(x) = - r_1(x) = (4/3)x + 2$, si ottiene $f_0(x) = f_1(x)q_1(x) - f_2(x)$.

Dividiamo $f_1(x)$ per $f_2(x)$:

$$\begin{array}{lll|l}
3x^2 & & -2 & (4/3)x + 2 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -(9/2)x & & (9/4)x - 27/8 \\ \cline{1-3}
// & -(9/2)x & -2 & \\
 & +(9/2)x & +27/4 & \\ \cline{2-3}
 & // & +19/4 &
\end{array}$$

Poniamo $f_3(x) = - r_1(x) = - 19/4 =$ costante.

Abbiamo così ottenuto la successione

$$f_o(x) = x^3 - 2x - 2,\ \ f_1(x) = 3x^2 - 2,\ \ f_2(x) = (4/3)x + 2,\ \ f_3(x) = -19/4.$$
~~~~~

Calcoliamo dapprima il numero degli zeri reali sulla retta reale. A tal fine, valutiamo il limite della successione delle funzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f_0(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f_0(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f_1(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f_1(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f_2(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f_2(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f_3(x) = -19/4, \qquad \lim_{x\to +\infty} f_3(x) = -19/4.$$

Poiché $V(-\infty) = 2$ e $V(+\infty) = 1$, risulterà $|V(-\infty) - V(+\infty)| = 1$ ovvero la funzione ammette un solo zero reale.

Ricordando la regola dei segni di Cartesio possiamo concludere che, poiché l'equazione f(x) presenta una sola variazione, allora tale zero sarà sicuramente positivo.

~~~~~

Seguirà l'assegnazione di alcuni esercizi sulla determinazione del numero degli zeri reali di un'equazione algebrica.

≈≈≈≈≈

Nella lezione successiva si passerà alla trattazione della separazione delle radici. A tale scopo sarà utile applicare il teorema, noto dall'analisi matematica, dell'esistenza degli zeri.

Teorema. Se una funzione continua f(x) assume agli estremi dell'intervallo [a, b] valori di segno opposto, ossia $f(a)f(b) < 0$, esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la funzione si annulla. Vale inoltre che, se la funzione è derivabile e la sua derivata ha segno costante in tutto l'intervallo, tale radice è unica.

Per la separazione delle radici si può procedere alla rappresentazione grafica della funzione $y = f(x)$. Le ascisse dei punti di intersezione di questo grafico con l'asse delle x sono le radici dell'equazione.

~~~~~

ESEMPIO 2

Data l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$, di cui sappiamo, in virtù dell'esempio 1, che esiste una sola radice reale, procediamo alla sua separazione tracciando il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 2x - 2$.

La funzione è definita e continua in **R**, inoltre

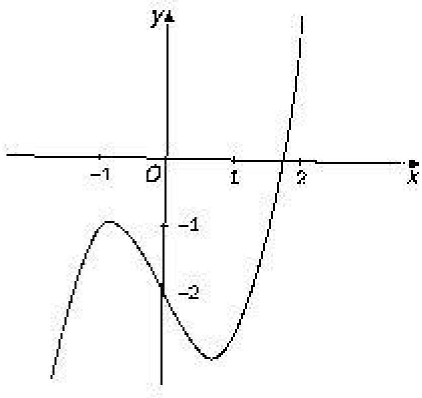
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Dalle derivate prima e seconda

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \quad \text{e} \quad f''(x) = 6x,$$

si ricava che la funzione ha un massimo relativo in $(-\sqrt{(2/3)}, (4/3)\sqrt{(2/3)} - 2)$, un minimo relativo in $(\sqrt{(2/3)}, -(4/3)\sqrt{(2/3)} - 2)$ ed un flesso a tangente obliqua in (0, -2).

Si ha il grafico riportato di seguito, dal quale si vede il punto in cui la curva interseca l'asse delle x.



Determiniamo l'intervallo nel quale cade la radice. Si ha:

$$f(1) = -3 < 0, \quad f(2) = +2 > 0$$

perciò $1 < \alpha < 2$.

~~~~~

Si farà notare che per certe equazioni, soprattutto per quelle trascendenti, può essere difficile tracciare un grafico sommario della funzione y = f(x). Si può allora scrivere f(x) come differenza di due funzioni g(x) e h(x), più semplici da rappresentare graficamente:

$$f(x) = g(x) - h(x),$$

e le radici dell'equazione f(x) = 0 si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Le ascisse dei punti di intersezione delle due curve, grafici delle due funzioni, sono le radici dell'equazione f(x) = 0.

~~~~~

ESEMPIO 3

Separare le radici dell'equazione

$$e^{-x} - x + 1 = 0.$$

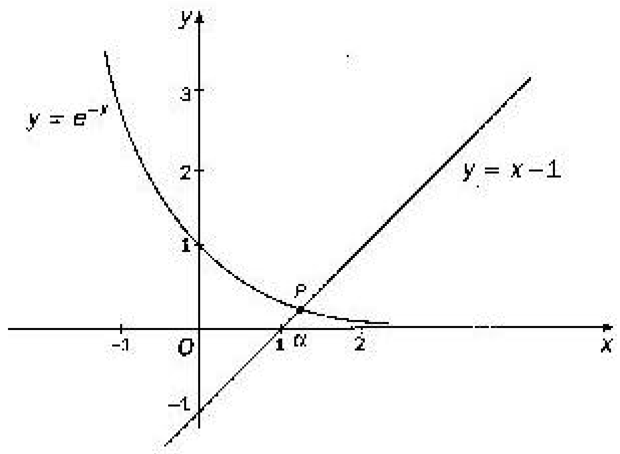
Scriviamo l'equazione nella forma:

$$e^{-x} = x - 1$$

e consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente le due funzioni in uno stesso sistema di riferimento cartesiano:



Si ricava che le due curve si intersecano nel solo punto P, pertanto l'equazione ammette una sola radice, che è l'ascissa del punto P e tale radice è compresa nell'intervallo [1,2].

~~~~~

Si aggiungerà inoltre che se la funzione è continua, la separazione delle radici può essere fatta anche con metodo algebrico, che consiste nel calcolare il valore della funzione (o anche solo il segno) per successivi valori di x in un certo intervallo; è praticamente sufficiente realizzare un processo dicotomico dividendo l'intervallo dato in 2, 4, 8,… parti approssimativamente uguali. Ogni volta che la funzione ha una variazione di segno nel passaggio da x_i a x_{i+1}, nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ è compresa almeno una radice. Questo procedimento può essere facilmente eseguito utilizzando un calcolatore.

Si farà seguire un'esercitazione in laboratorio, durante la quale, con l'uso del foglio elettronico Excel, si mostrerà il seguente

~~~~~

ESEMPIO 4

Separare le radici dell'equazione $x^3 - 8x + 2$ nell'intervallo [-4; 4], utilizzando un foglio di calcolo.

SEPARAZIONE DELLE RADICI

$f(x) = x^3 - 8x + 2$

a = -4 f(a) = -30

b = 4 f(b) = 34

n° passi = 20

k = (b-a)/20 = 0,4

Passo	a + k	f(a + k)
1	-3,6	-15,856
2	-3,2	-5,168
3	-2,8	2,448
4	-2,4	7,376
5	-2	10
6	-1,6	10,704
7	-1,2	9,872
8	-0,8	7,888
9	-0,4	5,136
10	0,0	2
11	0,4	-1,136
12	0,8	-3,888
13	1,2	-5,872
14	1,6	-6,704
15	2	-6
16	2,4	-3,376
17	2,8	1,552
18	3,2	9,168
19	3,6	19,856
20	4	34

Cella	Funzione	Formula Excel
B9	a + k	=C3 + $D$6
C9	f(a + k)	=B9^3–8*B9+2
B10	a_i + k	=B9 + $D$6
C10	f(a_i + k)	=B10^3-8B10+2

Come si può vedere, la funzione cambia segno negli intervalli [-3,2; -2,8], [0; 0,4], [2,4; 2,8]. L'equazione data ha perciò tre radici reali i cui valori sono compresi negli intervalli suddetti.

~~~~~

Si proporrà quindi di risolvere con i metodi presentati i seguenti esercizi:

1. Separare le soluzioni dell'equazione $2x^3 - 6x + 1 = 0$, dopo averne determinato il numero.
2. Separare le radici dell'equazione x + logx = 0. È possibile, a priori, determinarne il numero? Perché?

≈≈≈≈≈

Approssimazione del valore di una soluzione

Una volta effettuata la separazione delle soluzioni e individuati gli intervalli in cui cade una sola soluzione, si può procedere all'approssimazione delle radici cercate.

Nella lezione successiva, riprendendo, per esempio, l'equazione dell'esempio 1, si mostrerà come è possibile ottenere un valore approssimato dell'unica soluzione determinata e come tale approssimazione possa essere successivamente migliorata.

Per procedere all'approssimazione di una soluzione si possono seguire diversi metodi. Si comincerà col considerare il
~~~~~

Metodo di bisezione o dicotomico.

Data l'equazione $f(x) = 0$, supponiamo che essa sia continua nell'intervallo $[a, b]$ in cui cade una sola soluzione. Come già detto, ciò vuol dire che risulta $f(a)f(b) < 0$ e che, inoltre, è $f'(x) > 0$ oppure $f'(x) < 0$.

Per ottenere un valore approssimato della soluzione $x = \alpha$ si procede come segue: si divide l'intervallo $[a, b]$ in due parti uguali e si calcola il valore della funzione nel punto medio di ascissa $(a + b)/2$. Se risulta $f((a + b)/2) = 0$, allora $(a + b)/2$ è la radice cercata, altrimenti consideriamo i due nuovi intervalli $[a, (a + b)/2]$ e $[(a + b)/2, b]$. Di questi si sceglie quello ai cui estremi la funzione $f(x)$ assume valori di segno opposto. Per comodità chiamiamo questo intervallo $[a_1, b_1]$ e ripetiamo il processo di dimezzamento. Così continuando si ottiene una successione di intervalli, ognuno incluso nel precedente, $[a_1, b_1]$, …, $[a_n, b_n]$, di ampiezze $b_n - a_n = (b - a) / 2^n$.

I valori a_i sono valori approssimati per difetto della radice α e i valori b_i sono valori approssimati per eccesso di α. Inoltre, gli a_i formano una successione non decrescente limitata e i b_i formano una successione non crescente limitata e ammettono lo stesso limite che è la radice α, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} (b - a) / 2^n = 0$$

Fissata l'approssimazione ε richiesta, si può ricavare il numero n di dimezzamenti necessari.

Dalla condizione $b_n - a_n \le \varepsilon$ si ricava $(b - a) / 2^n \le \varepsilon$ da cui si ha $n \ge \log_2 (b - a) / \varepsilon$.

Si farà notare che il metodo dicotomico si può facilmente realizzare nei calcolatori elettronici. Il programma di calcolo sarà composto in modo che la macchina fornisca il valore del secondo membro dell'equazione nel punto medio dell'intervallo $[a_n, b_n]$ e scelga la sua metà opportuna.

~~~~~

ESEMPIO 5

Data l'equazione $x^3 - 2x - 2$ determinare le radici a meno di 10^{-3}.

Servendosi di un foglio Excel la soluzione sarà la seguente:
~~~~~

METODO DICOTOMICO 1

f(x) =	x^3-2x-2
a =	1
b =	2
eps =	0,0001

passo	a	b	m	f(a)	f(b)	f(m)
1	1	2	1,5	-3	2	-1,625
2	1,5	2	1,75	-1,625	2	-0,140625
3	1,75	2	1,875	-0,140625	2	0,8417969
4	1,75	1,875	1,8125	-0,140625	0,841797	0,3293457
5	1,75	1,8125	1,78125	-0,140625	0,329346	0,0891418
6	1,75	1,78125	1,765625	-0,140625	0,089142	-0,0270348
7	1,765625	1,78125	1,773438	-0,0270348	0,089142	0,0307288
8	1,765625	1,773438	1,769531	-0,0270348	0,030729	0,001766
9	1,765625	1,769531	1,767578	-0,0270348	0,001766	-0,0126546
10	1,767578	1,769531	1,768555	-0,0126546	0,001766	-0,0054493
11	1,768555	1,769531	1,769043	-0,0054493	0,001766	-0,0018429
12	1,769043	1,769531	1,769287	-0,0018429	0,001766	-0,000039
13	1,769287	1,769531	1,769409	-0,000039	0,001766	0,0008636
14	1,769287	1,769409	1,769348	-0,000039	0,000864	0,0004124
15	1,769287	1,769348	1,769318	-0,000039	0,000412	0,0001868

Tale foglio Excel sfrutta le seguenti formule ricorsive che, una volta determinato il punto medio m di [a, b], forniscono gli estremi del nuovo intervallo contenente la radice:

$$a_1 = [a + (1 - segno(f(a)*f(m)))*a/2 + (1 + segno(f(a)*f(m)))*b/2]/2$$

$$b_1 = [b + (1 - segno(f(a)*f(m)))*a/2 + (1 + segno(f(a)*f(m)))*b/2]/2$$

Cella	Funzione	Formula Excel
B8	a_1	= \$C\$3
C8	b_1	= \$C\$4
D8	m	= (B8 + C8)/2
E8	f(a)	= B8^3 – 2*B8 – 2
F8	f(b)	= C8^3 – 2*C8 – 2
G8	f(m)	= D8^3 – 2*D8 – 2
B9	a_2	= (B8+(1–segno(E8*G8))*B8/2+(1+segno(E8*G8))*C8/2)/2
C9	b_2	= (C8+(1–segno(E8*G8))*B8/2+(1+segno(E8*G8))*C8/2)/2

Lo stesso metodo può essere implementato in Excel facendo uso di formule condizionali, nel seguente modo:

METODO DICOTOMICO 2

f(x) =	x^3-2x-2
a =	1
b =	2
eps =	0,0001

passo	a	b	m	f(a)	f(b)	f(m)	TEST
1	1	2	1,5	-3	2	-1,625	
2	1,5	2	1,75	-1,625	2	-0,140625	
3	1,75	2	1,875	-0,140625	2	0,841797	
4	1,75	1,875	1,8125	-0,140625	0,841797	0,329346	
5	1,75	1,8125	1,78125	-0,140625	0,329346	0,089142	
6	1,75	1,78125	1,765625	-0,140625	0,089142	-0,027035	
7	1,765625	1,78125	1,773438	-0,027035	0,089142	0,030729	
8	1,765625	1,773438	1,769531	-0,027035	0,030729	0,001766	
9	1,765625	1,769531	1,767578	-0,027035	0,001766	-0,012655	
10	1,767578	1,769531	1,768555	-0,012655	0,001766	-0,005449	
11	1,768555	1,769531	1,769043	-0,005449	0,001766	-0,001843	
12	1,769043	1,769531	1,769287	-0,001843	0,001766	-0,000039	
13	1,769287	1,769531	1,769409	-0,00004	0,001766	0,000864	
14	1,769287	1,769409	1,769348	-0,00004	0,000864	0,000412	
15	1,769287	1,769348	1,769318	-0,00004	0,000412	0,000187	STOP

Cella	Funzione	Formula Excel
B8	a_1	= \$C\$3
C8	b_1	= \$C\$4
D8	m	= (B8 + C8)/2
E8	f(a)	= POTENZA(B8;3) – 2*B8 – 2
F8	f(b)	= POTENZA(C8;3) – 2*C8 –2
G8	f(m)	= POTENZA(D8;3) – 2*D8 – 2
B9	a_2	= SE(G8*E8>0; D8; B8)
C9	b_2	= SE(G8*E8>0; C8; D8)
H8	STOP	= SE(C8 – B8 < \$C\$5; “STOP”; “ “)

~~~~~

Si proporrà allora di determinare, a meno di 10^{-4}, le radici approssimate dell’equazione $x^3 - 5x^2 + 11x - 10 = 0$.

≈≈≈≈≈

La quinta lezione verterà sul

Metodo delle corde

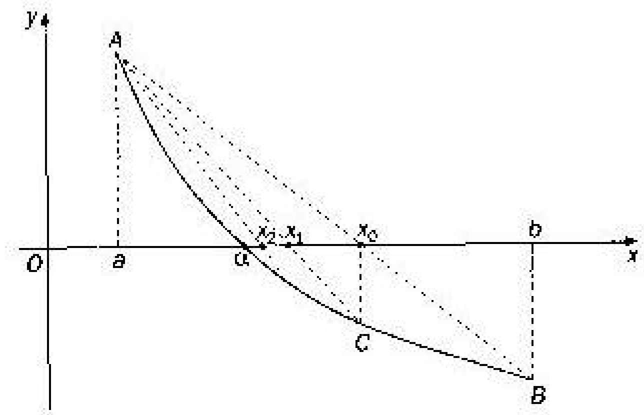
Si metterà in evidenza che tale metodo risulta più rapido nella ricerca della radice α dell’equazione f(x) =0, appartenente all’intervallo considerato [a, b] tale che f(a)f(b) < 0.

Nell’ipotesi che in tutto l’intervallo la funzione f(x) abbia derivata prima e seconda continue e di segno costante, si può notare che:
~~~~~

- la costanza del segno di f '(x) serve a garantire che la funzione è sempre crescente o sempre decrescente in tutto l'intervallo;
- la costanza del segno di f "(x) serve a garantire che la funzione sia concava verso l'alto o verso il basso in tutto l'intervallo.

Geometricamente, il metodo delle corde consiste nel sostituire nell'intervallo [a, b] alla curva y = f(x) la corda passante per i punti A(a, f(a)) e B(b, f(b)).

A titolo indicativo si traccerà la figura seguente:



Dato che l'equazione della retta passante per A e B è

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

ne segue che

$$x = a + \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

è l'ascissa di un generico punto di ordinata y sulla corda.

Tale retta interseca l'asse delle x nel punto di ascissa

$$x_o = a - \frac{f\,(a)}{f(b) - f(a)}(b\text{-}a) = \alpha_1, \text{ cioè}$$

$$x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

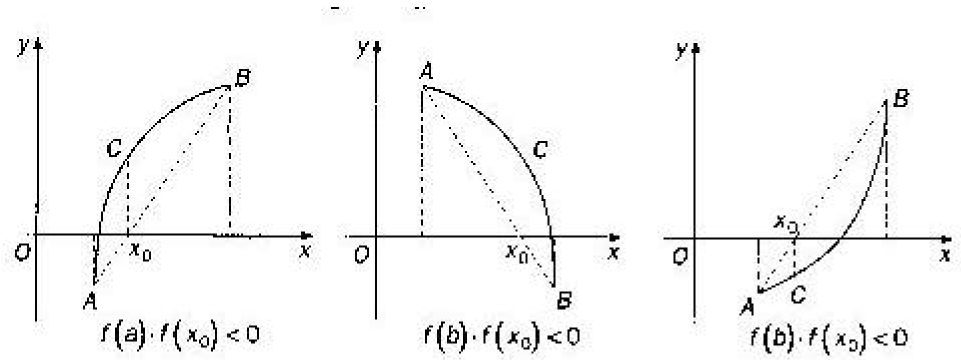
Partendo da α_1 la soluzione può essere approssimata successivamente.

Per procedere a tale approssimazione successiva conviene distinguere due casi a seconda che sia f(a) > 0 oppure f(a) < 0.

Se $f(a) > 0$, come nella figura precedente, si considera il prodotto $f(a)f(x_o)$; se questo prodotto è minore di zero, il nuovo intervallo sarà $[a, x_o]$, altrimenti sarà $[x_o, b]$.

Naturalmente il segno del prodotto dipende dalla situazione di crescita o di decrescita di $f(x)$ e dalla concavità della curva.

Oltre al caso illustrato nella figura precedente, si hanno i tre casi che schematizziamo nella figura seguente:



Si può dimostrare, in forza dell'ipotesi che la funzione e le sue derivate prima e seconda sono continue nell'intervallo, che si deve scegliere l'estremo dell'intervallo in cui la funzione e la sua derivata seconda hanno lo stesso segno.

Se $f(a)f(x_o) < 0$, si applica il procedimento all'intervallo $[a, x_o]$. Si traccia la retta che unisce i punti $A(a, f(a))$ e $C(x_o, f(x_o))$ e si determina il punto x_1:

$$x_1 = \frac{af(x_o) - x_o f(a)}{f(x_o) - f(a)}.$$

Si ha così la formula ricorrente

$$x_{n+1} = \frac{af(x_n) - x_n f(a)}{f(x_n) - f(a)}.$$

Se invece $f(a)f(x_o) > 0$, e quindi $f(b)f(x_o) < 0$, si deve scegliere l'intervallo $[x_o, b]$ e si determina una formula analoga

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - bf(x_n)}{f(b) - f(x_n)}.$$

Si può dimostrare che se la funzione $f(x)$ è continua con le sue derivate prima e seconda e inoltre nell'intervallo $[a, b]$ risulta $f'(x) \neq 0$ ed $f''(x) \neq 0$, allora la successione delle x_n converge ad α.

Fissato il grado di approssimazione ε, il procedimento ha termine quando $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, in particolare:

- se $f(a) < 0$, le approssimazioni successive formano una successione monotona crescente e limitata $x_o < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \alpha < b$ che fornisce valori approssimati per difetto;
- se $f(a) > 0$, le approssimazioni successive formano una successione monotona decrescente e limitata $a < \alpha < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_o$ che fornisce valori approssimati per eccesso.

~~~~~

ESEMPIO 6

METODO DELLE CORDE 1

$f(x) = x^3-2x-2$
a = 1
b = 2
eps = 0,0001

passo	x_i	$f(x_i)$	b	f(b)	a	f(a)
1	1,6	-1,104	2	2	1	-3
2	1,742268	-0,195885	2	2	1	-3
3	1,765259	-0,029724	2	2	1	-3
4	1,768697	-0,0044	2	2	1	-3
5	1,769205	-0,000649	2	2	1	-3

Nel presente esempio si è calcolata con il metodo delle corde, attraverso il foglio Excel, la radice dell'equazione $x^3 – 2x – 2 = 0$, già calcolata negli esempi precedenti con il metodo dicotomico.

Cella	Funzione	Formula Excel
B8	x	=(F8*E8 – D8*G8)/(E8 – G8)
C8	f(x)	=B8^3 - 2*B8 – 2
D8	b	=$C$4
E8	f(b)	=D8^3 – 2*D8 – 2
F8	a	=$C$5
G8	f(a)	=F8^3 - 2*F8 – 2
B9	x_n	=(B8*E8 – D8*C8)/(E8 – C8)

Si farà eseguire lo stesso esempio, sfruttando formule ricorsive:
~~~~~

METODO DELLE CORDE 2

f(x) =	x^3-2x-2
a =	1
b =	2
eps =	0,0001

passo	a	b	x_i	f(a)	f(b)	$f(x_i)$	TEST
1	1	2	1,6	-3	2	-1,104	
2	1,6	2	1,742268	-1,104	2	-0,195885	
3	1,742268	2	1,765259	-0,195885	2	-0,029724	
4	1,765259	2	1,768697	-0,029724	2	-0,0044	
5	1,768697	2	1,769205	-0,0044	2	-0,000649	
6	1,769205	2	1,769279	-0,000649	2	-0,00010	STOP

Cella	Funzione	Formula Excel
B8	a_1	=$C$3
C8	b_1	=$C$4
D8	x_i	=(B8*F8 – C8*E8)/(F8 – E8)
E8	f(a)	=POTENZA(B8;3) – 2*B8 – 2
F8	f(b)	=POTENZA(C8;3) – 2*C8 – 2
G8	$f(x_i)$	=POTENZA(D8;3) - 2*D8 – 2
B9	a_2	=SE(G8*E8 >0; D8; B8)
C9	b_2	= SE(G8*E8 >0; C8; D8)
H9	STOP	=SE(ASS(D9 – D8) < $C$5; “STOP”; “ “)

≈≈≈≈≈

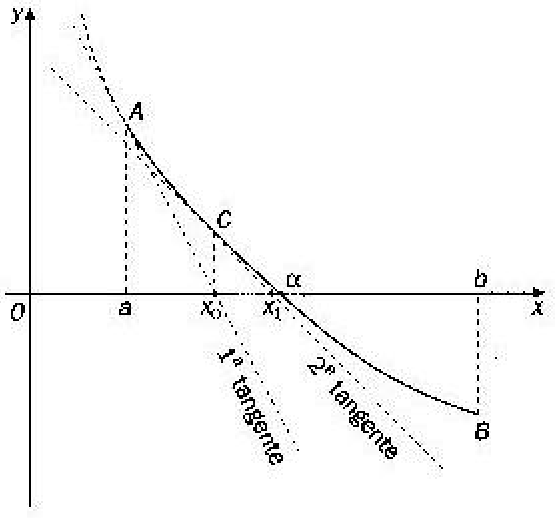
Nel corso della lezione successiva sarà presentato il

Metodo delle tangenti

Consideriamo l’equazione f(x) = 0 ammettendo, al solito, che nell’intervallo [a,b] cada una sola soluzione. Ammettiamo, inoltre, che in tutto l’intervallo, il segno della derivata prima e seconda siano costanti.

Ciò posto, possiamo dire che il metodo di Newton o delle tangenti consiste nel sostituire, nell’intervallo [a, b], alla curva che rappresenta f(x) la retta tangente ad essa in un estremo dell’intervallo e assumere come valore approssimato della radice, l’ascissa x_o del punto in cui la tangente interseca l’asse delle x, internamente all’intervallo [a, b].

A titolo indicativo si farà osservare la seguente figura:



Si considererà allora l'equazione della tangente alla curva nel punto A(a, f(a)):

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Se $f'(a) \neq 0$, posto $y = 0$, si ricava:

$$x_o = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Si ha così l'intervallo $[x_o, b]$; si ripete il procedimento per x_o e si ottiene un'altra approssimazione della radice:

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_0)}$$

si ricava, così, la formula ricorrente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

che permette di determinare successive approssimazioni della radice α. Anzi, con le ipotesi poste, si può dimostrare che la successione delle x_n converge proprio ad α.

Fissato il grado di approssimazione ε, il procedimento ha termine quando $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Osserviamo che, per quanto riguarda la scelta dell'estremo dell'intervallo in cui considerare la retta tangente, è necessario procedere partendo dal punto in cui la funzione e la sua derivata seconda hanno lo stesso segno.

Si noterà, infatti, che nel caso considerato, se si fosse posto $x_o = b$ e di conseguenza $f(x_o)f''(x_o) < 0$, tracciando la tangente alla curva per il punto B(b, f(b)), si sarebbe ottenuto il punto x_1, situato all'esterno dell'intervallo [a, b], cioè questa scelta del valore iniziale avrebbe reso il metodo di Newton poco pratico.

Si farà osservare inoltre che tale metodo è soprattutto comodo quando, nell'intorno della radice data, il grafico della funzione ha una pendenza considerevole. Ma se il valore numerico della derivata f '(x), nell'intorno della radice, è piccolo, il calcolo della radice mediante questo metodo può risultare laborioso e divenire anche impossibile.

Quindi, se la curva y = f(x) è quasi orizzontale nell'intorno del punto di intersezione con l'asse delle ascisse, non è consigliabile l'applicazione del metodo di Newton per la soluzione dell'equazione f(x) = 0.

Si ritiene, a questo punto, opportuno evidenziare che il metodo delle corde e il metodo delle tangenti danno soluzioni approssimate per eccesso o per difetto, secondo la concavità della curva, ma se applicati ad una stessa funzione, della radice α uno dà una soluzione approssimata per difetto e l'altro per eccesso.

Si proporrà la risoluzione dell'equazione, già risolta col metodo dicotomico (esempio 5) e con il metodo delle corde (esempio 6), facendo uso di due fogli Excel in cui si applica il metodo delle tangenti (nel secondo foglio si fa uso di formule ricorsive).

~~~~~

ESEMPIO 7

METODO DELLE TANGENTI 1

$f(x) = x^3-2x-2$

a = 1	f(a) = -3	f'(a) = 1
b = 2	f(b) = 2	f'(b) = 10
eps = 0,0001		

passo	x	f(x)	f'(x)
1	4	54	46
2	2,826087	14,91913	21,9603
3	2,146719	3,599507	11,82521
4	1,842326	0,568509	8,182498
5	1,772848	0,026345	7,428966
6	1,769301	0,000067	7,391282
7	1,769292	0,000000	7,391186

Cella	Funzione	Formula Excel
B8	x	=$C$3 – (E3/G3)
C8	f(x)	=B8^3 - 2*B8 – 2
D8	f'(x)	=3*B8^2 – 2
B9	x_i	=B8 – (C8/D8)
~~~~~

METODO DELLE TANGENTI 2

f(x) =	x^3-2x-2				
a =	1	f(a) =	-3	f''(a) =	6
b =	2	f(b) =	2	f''(b) =	12
eps =	0,0001				

passo	x	f(x)	f'(x)	TEST
1	2	2	10	
2	1,8	0,232	7,72	
3	1,769948	0,00485	7,39815	
4	1,769293	2,28E-06	7,39119	
5	1,769292	5,05E-13	7,391186	STOP

Cella	Funzione	Formula Excel
B8	x	=SE(E3*G3 ≥ 0; $C$3; $C$4)
C8	f(x)	=POTENZA(B8;3) - 2*B8 – 2
D8	f'(x)	=3*POTENZA(B8;2) – 2
B9	x_i	=B8 – (C8/D8)
E9	STOP	=SE(ASS(D9 – D8) < $C$5; "STOP"; " ")

≈≈≈≈≈

I due metodi precedenti, portando ad una successione di approssimazioni da un solo lato del valore esatto della radice, non sempre consentono di valutare, con dovuta precisione, l'errore commesso.

Si ritiene interessante mostrare che, se ci si avvicina al valore esatto della radice simultaneamente da ambedue i lati, allora, maggiorando la differenza $\overline{x}_n - x_n$ (dove $\overline{x}_n$ e x_n indicano rispettivamente il valore al passo n-esimo ottenuto approssimando la radice con il metodo delle tangenti e con quello delle secanti), diventa possibile considerare rapidamente il grado di esattezza delle approssimazioni effettuate.

Tale metodo, detto

Metodo combinato,

sarà oggetto della settima lezione.

Sia f(a)f(b) < 0 e supponiamo sempre che f'(x) e f''(x) conservino il segno costante nell'intervallo [a, b].

Combinando i due metodi delle secanti e delle tangenti si ottiene un metodo, ad ogni stadio del quale, si trovano valori per difetto e per eccesso della radice esatta dell'equazione f(x) = 0. ne risulta, in particolare, che le cifre comuni a x_n e $\overline{x}_n$ appartengono necessariamente alla radice esatta. Teoricamente possono aver luogo quattro casi:

1. $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$;
2. $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$;
3. $f'(x) < 0$; $f''(x) > 0$;
4. $f'(x) < 0$; $f''(x) < 0$.

Limitiamo lo studio al primo caso.

Sia dunque $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ per $a \le x \le b$; poniamo $x_o = a$, $\bar{x}_o = b$ e

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n)\,;$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$

Da quanto dimostrato in precedenza deriva che $x_n < \alpha < \bar{x}_n$ e $0 < \alpha - x_n < \bar{x}_n - x_n$.

Se l'errore assoluto della radice approssimata x_n è dato a priori ed è uguale ad ε, il processo di avvicinamento cessa nell'istante in cui si stabilisce che $\bar{x}_n - x_n < \varepsilon$. Finito il processo, sarà meglio prendere quale valore della radice α la media aritmetica degli ultimi valori ottenuti: $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(x_n + \bar{x}_n)$.

~~~~~

ESEMPIO 8

Calcolare l'unica radice positiva dell'equazione $f(x) = x^3 - 2x - 2 = 0$ a meno di 10^{-4}.

Sappiamo che la radice appartiene all'intervallo [1, 2] e che in tale intervallo $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$.

Applichiamo il metodo combinato ponendo $x_o = 1$ e $\bar{x}_o = 2$, mediante l'uso di un foglio Excel.

METODO COMBINATO

f(x) =	x^3-2x-2			
x0 =	1	f(x0) = -3		
x0 =	2	f(x0) = 2	f'(x0) =	10
eps =	0,0001			

passo	x_i	$f(x_i)$	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_i - x_i$	TEST
1	1,6	-1,104	1,8	0,232	7,72	0,2	
2	1,765269	-0,029648	1,769948	0,00485	7,39815	0,004679	
3	1,76929	-0,00001	1,769293	0,00000	7,39119	0,000002	STOP

Cella	Funzione	Formula Excel
B8	x_1	=\$C\$3 – (\$E\$3 / (\$E\$4 - \$E3))*(\$C\$4 - \$C\$3)
C8	$f(x_i)$	=B8^3 – 2*B8 – 2
D8	$\bar{x}_1$	=\$C\$4 – (\$E\$4 - \$G\$4)
E8	$f(\bar{x}_i)$	=D8^3 - 2*D8 – 2
~~~~~

F8	$f'(\bar{x}_i)$	=3*D8^2-2
G8	$\bar{x}_i - x_i$	=D8 – B8
H8	STOP	=SE(ASS(G8) < $C$5; “STOP”; “ “)
B9	x_i	=B8 – (C8 / (E8 – C8))*G8
D9	$\bar{x}_i$	=D8 – (E8 / F8)

Alla fine basta scegliere $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + x_n)$.

≈≈≈≈≈

Si concluderà l'unità con una lezione sul

Metodo di iterazione.

Per determinare una radice approssimata dell'equazione $f(x) = 0$ con il metodo di iterazione, la si trasforma in un'altra, ad essa equivalente, avente la forma

$$x = g(x) \qquad (1)$$

Prendendo un qualsiasi valore approssimato α_o di una radice dell'equazione $f(x) = 0$ e sostituendo nel secondo membro della (1) otteniamo un valore $\alpha_1 = g(\alpha_o)$. Sostituendo quindi nel secondo membro della (1) il valore α_1 ottenuto, si ha un nuovo valore $\alpha_2 = g(\alpha_1)$. Procedendo ulteriormente otteniamo una successione $\alpha_n = g(\alpha_{n-1})$.

Se questa successione è convergente, la radice α dell'equazione $f(x) = 0$ è data da

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Perché il metodo iterativo sia applicabile occorre che la successione α_n sia convergente. A tal proposito vale il seguente

Teorema. Data la funzione $g(x)$, definita nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile in ogni punto di $[a, b]$, se risulta $|g'(\alpha)| < 1$, $\forall\alpha$ tale che $a < \alpha < b$, allora la successione α_n è convergente indipendentemente dal valore iniziale $\alpha_o \in [a, b]$.

In tal caso, la radice dell'equazione $x = g(x)$ è $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.

~~~~~

ESEMPIO 9

Consideriamo la solita equazione $x^3-2x-2 = 0$. Scriviamo

$$x = \frac{x^3 - 2}{2}.$$
~~~~~

Sia $g(x) = \dfrac{x^3 - 2}{2}$, da cui $g'(x) = (3/2)\,x^2$, allora $\forall x \in [1; 2]$ la condizione $|g'(x)| < 1$ non è verificata.

Scriviamo allora l'equazione nella forma seguente:

$$x = \sqrt[3]{(2x + 2)},$$

e sia $g(x) = \sqrt[3]{(2x + 2)}$, da cui $g'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x + 2)^2}}$, funzione decrescente di x, tale che

$$g'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{16}} \quad e \quad g'(2) = \frac{2}{3\sqrt[3]{36}},$$

quindi la condizione di convergenza $|g'(x)| < 1$, per $x \in [1; 2]$, è verificata.

Partendo allora da $\alpha_0 = 1{,}5$, si trova successivamente

$$\alpha_1 = g(\alpha_0)$$

$$\alpha_2 = g(\alpha_1)$$

…

~~~~~

Facendo uso dei metodi presentati si assegnerà di determinare, a meno di 10^{-3}, le radici approssimate delle seguenti equazioni:

1. $x^3 - 8x + 2 = 0$
2. $5x^3 - x^2 - x - 6 = 0$
3. $e^x - x - 2 = 0$.

≈≈≈≈≈

VERIFICA E VALUTAZIONE

Ai fini della valutazione, saranno somministrate le seguenti schede di verifica.

<u>Scheda di verifica 1</u>

1. Data un'equazione algebrica $f(x) = 0$ di grado $n \in N$, è possibile determinare in maniera esatta:

- ❑ Soltanto le radici reali
- ❑ Sia le radici reali che quelle complesse
- ❑ Il numero delle radici
~~~~~

- ❑ Il numero delle radici reali.

2. Dato un intervallo [a, b] con a, b $\in$ **R**, e un'equazione f(x) = 0, se si verifica che f(a)f(b) < 0, allora:

- ❑ Esiste almeno una radice dell'equazione in [a, b]
- ❑ Non esiste alcuna soluzione in [a, b]
- ❑ Non ci sono elementi sufficienti per rispondere.

3. Nella risoluzione di un'equazione (algebrica o trascendente), il metodo dicotomico è utilizzato per:

- ❑ Separare le radici
- ❑ Determinare un valore approssimato di una radice
- ❑ Risolvere in modo esatto l'equazione
- ❑ Abbassare di grado l'equazione.

4. In quali di questi casi è applicabile il metodo delle corde?

- ❑ $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- ❑ $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- ❑ $f'(x)$ e $f''(x)$ hanno segno costante $\forall x \in [a, b]$
- ❑ Sempre.

5. Il metodo delle tangenti per risolvere un'equazione si può applicare:

- ❑ Sempre
- ❑ Solo per equazioni algebriche
- ❑ Se $f'(x)$ e $f''(x)$ sono continue e non nulle in [a, b]
- ❑ Se $f(a)f(b) \neq 0$.

6. Il metodo delle tangenti fornisce valori della radice approssimati:

- ❑ Per eccesso
- ❑ Per difetto
- ❑ Per eccesso o per difetto secondo la concavità della curva.

7. Applicando i metodi delle secanti e delle tangenti ad una stessa funzione:

- ❑ Il primo fornisce valori della radice approssimati per difetto ed il secondo per eccesso

- Il primo fornisce valori della radice approssimati per eccesso, il secondo per difetto
- Uno fornisce valori della radice approssimati per eccesso e l'altro per difetto secondo la concavità della curva
- Forniscono entrambi valori per eccesso o per difetto secondo la concavità della curva.

8. Il metodo combinato:

- Non presenta alcun vantaggio rispetto ai metodi delle tangenti o delle secanti
- Fornisce soltanto valori della radice approssimati per eccesso
- Fornisce soltanto valori della radice approssimati per difetto
- Consente di considerare rapidamente il grado di esattezza delle approssimazioni effettuate.

9. Se con x_n si indica l'approssimazione n-esima della soluzione di un'equazione nell'intervallo [a, b], allora fissato il grado di approssimazione ε, il processo si arresta:

- Quando $x_n - x_{n+1} < \varepsilon$
- Quando $|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$
- Dopo un numero di passi scelto arbitrariamente.

10. Quale metodo consente di determinare più velocemente un valore approssimato di una radice con un grado di precisione fissato?

- Metodo dicotomico
- Metodo delle tangenti
- Metodo combinato
- Sono tutti equivalenti.

<u>Scheda di verifica 2</u>

Dopo aver calcolato, nel caso in cui è possibile, il numero delle eventuali radici reali, separare le radici delle seguenti equazioni e, mediante il metodo di approssimazione che ritieni più opportuno, determinare un valore delle radici con approssimazione almeno di 10^{-3}.

1. $2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$
2. $x^2 - 2x - \log x = 0$
3. $e^x - x^2 = 0$

Verranno inoltre effettuate verifiche orali individuali che non si ridurranno alle semplici conoscenze mnemoniche dei contenuti, ma serviranno a rilevare le capacità di deduzione logica ed analogica dell'alunno. A tal fine si utilizzerà una griglia di valutazione che prenderà in esame le capacità di:

- percezione
- cognizione
- riflessione
- elaborazione
- applicazione

GRIGLIA DI VALUTAZIONE*

		GIUDIZIO
PERCEZIONE		
mostra:	attenzione	
	interesse	
	motivazione	
	partecipazione	
COGNIZIONE		
utilizza	risorse cognitive	
possiede	*i prerequisiti richiesti*	
ha assimilato	i contenuti dell'unità	
RIFLESSIONE		
ha capacità di:	analisi	
	comparazione	
	inferenza	
	sintesi	
	formalizzazione	
ELABORAZIONE		
sa:	*interpretare i risultati ottenuti*	
	valutare l'efficienza degli algoritmi utilizzati	
utilizza:	*linguaggio appropriato*	
	rigore espositivo	
	eleganza nell'argomentare	
APPLICAZIONE		
sa	applicare in Excel le conoscenze acquisite	

*I punti indicati saranno valutati esprimendo un giudizio tra i seguenti:
scarso, insufficiente, mediocre, sufficiente, discreto, buono, ottimo, eccellente.

UNITA' DIDATTICA: INTERPOLAZIONE

IL CONTESTO

La seguente unità didattica, avente come oggetto la trattazione dei metodi di interpolazione, è inserita all'interno di un modulo di analisi numerica, rivolto ad una classe quinta di un liceo scientifico ad indirizzo sperimentale.

L'unità didattica in questione è preceduta da due unità dedicate, rispettivamente, alla teoria degli errori ed alla risoluzione delle equazioni con metodi di approssimazione.

LE MOTIVAZIONI

Tecnica utilizzata per approssimare numericamente funzioni di cui si conoscono alcuni valori, l'interpolazione costituisce uno strumento matematico particolarmente utile ed efficace nell'ambito delle matematiche applicate e delle scienze sperimentali. Infatti, poiché spesso è possibile osservare sperimentalmente l'esistenza di relazioni tra due o più grandezze, sorge il problema di determinare una funzione che rappresenti queste relazioni e permetta di analizzare meglio i fenomeni osservati.

PREREQUISITI

Per intraprendere lo studio degli argomenti dell'unità si ritengono necessari i seguenti prerequisiti:

- sapere operare con espressioni letterali;
- possedere gli strumenti della geometria analitica;
- conoscere le nozioni fondamentali dell'analisi infinitesimale per le funzioni di una variabile.

OBIETTIVI

Alla fine dello svolgimento dell'unità, lo studente dovrà:

1. avere compreso il problema dell'interpolazione;
2. sapere costruire una funzione interpolante con i metodi di:
    - interpolazione lineare;
    - interpolazione parabolica;
    - Newton;
    - Lagrange;
3. sapere individuare quale metodo applicare in relazione ai dati del problema;
4. avere potenziato le sue abilità nelle tecniche di calcolo.

STRUMENTI E METODI

Sarà consigliato l'utilizzo del libro di testo come supporto agli appunti forniti durante le lezioni, le quali saranno condotte in modo da coinvolgere la partecipazione e l'interesse degli allievi. Eventuali difficoltà, che si evidenzieranno nel corso della trattazione degli argomenti, saranno recuperate grazie all'ausilio di alcune ore dedicate all'esercitazione.

CONTENUTI E PERCORSO DIDATTICO

In molti problemi si ha a che fare con una funzione f(x) di forma non elementare, o addirittura sconosciuta, di cui si possiede solo una tabulazione in un numero finito di punti (sovente si tratta di misurazioni sperimentali).

Il problema dell'interpolazione consiste nel determinare una curva y = F(x) che, in corrispondenza degli n + 1 valori:

$$x_0, x_1, \ldots, x_n,$$

punti di suddivisione di un generico intervallo [a, b], di cui si conoscono i valori

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n),$$

assume i valori:

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \ldots, F(x_n) = y_n.$$

Poiché di funzioni y = F(x) di tipo qualsiasi, che soddisfano alle condizioni precedenti, ne possono esistere infinite, o anche non esisterne, si cercherà di risolvere il problema dell'interpolazione determinando la funzione F(x), avente forma polinomiale.

Limitando lo studio a problemi che stabiliscono relazioni tra due sole grandezze, si presenteranno pertanto due tipi di interpolazione:

- lineare;
- parabolica o quadratica;

e le formule di interpolazione di Lagrange e di Newton.

Avendo a disposizione quattro ore settimanali, si ritiene necessario un numero di lezioni non inferiore a cinque, di due ore ciascuna, durante le quali è previsto anche lo svolgimento di alcune esercitazioni.

≈≈≈≈≈

Nella prima lezione, dopo aver presentato agli allievi la necessità di trattare il problema dell'interpolazione, si introdurrà il metodo di

Interpolazione lineare.

Tale metodo consiste nel costruire, come funzione interpolante, un polinomio di primo grado che passa per due punti rilevati.

Dati due punti $A(x_1;y_1)$ e $B(x_2;y_2)$, come si può ricordare dallo studio della geometria analitica, per tali due punti passa una ed una sola retta, la cui equazione è:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Da essa si ricava :

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Si ottiene in tal modo la funzione interpolante $y = f(x)$, cioè la retta interpolante. Nel caso di funzione tabulata è nota la funzione e con l'interpolazione lineare si sostituisce all'arco di curva fra i due punti A e B, il segmento di estremi AB.

Con l'*interpolazione diretta*, per ogni valore di x, tale che $x_1 < x < x_2$, si calcola il valore di y che risulta approssimato per difetto o per eccesso, secondo l'andamento della funzione. Viceversa, con l'*interpolazione inversa*, noto y, con la stessa relazione si calcola il valore di x che risulta pure approssimato per difetto o per eccesso.

~~~~~

ESEMPIO 1

Dai dati del censimento del 1981 risultava che le abitazioni occupate in Italia erano 17542 e dal censimento del 1991 erano 19736.

Valutare, mediante interpolazione lineare, il numero di abitazioni nel 1984.

Siano (1981;17542) e (1991;19736) le coppie rilevate; si ha la relazione:

$$(y - 17542) : (19736 - 17542) = (1984 - 1981) : (1991 - 1981)$$

e si ricava

$$y = 17542 + (3/10)2194 = 18200{,}2.$$

Quindi si valuta che nel 1984, il numero delle abitazioni occupate sia stato di 18200,2 unità. Se si volessero conoscere dati relativi ad altri anni, con molta facilità, con l'uso di un foglio Excel, si mostrerà che è possibile ottenere i risultati desiderati:

INTERPOLAZIONE LINEARE

x_1 = 1981	x_2 = 1991
y_1 = 17542	y_2 = 19736

x	y
1981	17542
1982	17761,4
1983	17980,8
1984	18200,2
1985	18419,6
1986	18639
1987	18858,4
1988	19077,8
1989	19297,2
1990	19516,6
~~~~~

Cella	Funzione	Formula Excel
B6	x_1	=$C$2
C6	y_1	=$C$3
B7	x_i	=B6+1
C7	y_i	=C6 +(($E$3 -C6) / ($E$2-B6))*(B7-B6)

~~~~~

Si assegneranno poi i seguenti esercizi:

1) Data la tabella

x	f(x)
1	12,4735
2	14,7248

determinare l'equazione della retta interpolante e calcolare il valore di y per x = 1,65 ed il valore di x se y = 13,2615.

2) Determinare l'equazione della retta interpolante noti i punti A(3;14,28), B(5;10,72) e calcolare per quale valore di x risulta y = 12,85.

Entrambi gli esercizi dovranno essere risolti anche mediante l'uso del foglio Excel.

≈≈≈≈≈

Nella seconda lezione si spiegherà come, in modo analogo, se si conoscono tre punti, si può costruire una parabola d'asse verticale passante per i tre punti e valutare il valore di y per un x compreso fra essi. Si parla in questo caso di

Interpolazione parabolica.

Siano dati tre punti

$$A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2),\ C(x_3;y_3).$$

Come si può ricordare dallo studio della geometria analitica per questi tre punti passa una ed una sola parabola, la cui equazione è del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

In particolare, per ottenere i valori dei coefficienti a, b e c occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \end{cases}$$
~~~~~

$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2$$

$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3$$

Si tratta di un sistema costituito da tre equazioni di primo grado nelle incognite a, b e c. Sostituendo i valori ottenuti nell'equazione generica della parabola, si ottiene la funzione interpolante $y = f(x)$, cioè la parabola interpolante.

~~~~~

ESEMPIO 2

Consideriamo i punti A(-1;-1), B(0;0), C(2;14). Imponendo il passaggio della parabola generica $y = ax^2 + bx + c$ per i tre punti dati, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = -1 \\ c = 0 \\ 4a + 2b + c = 14 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della parabola passante per i tre punti è $y = 2x^2 + 3x$.

~~~~~

Si chiederà allora di risolvere i seguenti esercizi.

- Date le tabelle

x	0	2	3
y	3200	3000	2800

x	1	2	4
y	180	200	270

determinare l'equazione della parabola interpolante.

~~~~~

A questo punto si farà notare che il procedimento relativo alla costruzione di un polinomio interpolante può essere generalizzato imponendo la condizione che la $y = f(x)$ passi per 4 punti, per 5 punti e, in generale, per $n + 1$ punti. La funzione interpolante che si ottiene è, rispettivamente, un polinomio di 3° grado, di 4° grado e, in generale, di grado n.

Naturalmente, occorre notare che via via il procedimento di risoluzione si complica, in quanto, se si impone che la funzione interpolante passi per $n + 1$ punti, cioè sia di grado n, occorre risolvere un sistema lineare di $n + 1$ equazioni in $n + 1$ incognite. Per determinare i coefficienti del polinomio, evitando la risoluzione di un sistema complesso se n è grande, sono state introdotte varie formule che danno lo stesso polinomio. Formule di interpolazione particolarmente utili sono state determinate da Lagrange e da Newton.
~~~~~

≈≈≈≈≈

La lezione successiva sarà pertanto dedicata alla costruzione del

Polinomio interpolante di Lagrange.

Assegnate n + 1 coppie di punti

$$(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n),$$

con le x_i tutte distinte tra loro, è possibile dimostrare che esiste un unico polinomio P(x) di grado n tale che

$$P(x_i) = y_i, \qquad i = 0,\dots,n.$$

Si dimostra dapprima l'unicità.

Sia $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. La condizione $P(x_i) = y_i$ equivale a risolvere il sistema lineare di n + 1 equazioni nelle n + 1 incognite $a_0, a_1, \dots, a_n$

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ \dots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$$

Supponiamo, per assurdo, che esistano due polinomi $P_1(x)$ e $P_2(x)$ tali che

$$P_1(x_i) = P_2(x_i) = y_i \quad (i = 0, \dots, n).$$

In tal caso il polinomio $P(x) := P_1(x) - P_2(x)$, avente grado $\leq$ n, avrebbe almeno n + 1 zeri x_i per i = 0, …, n.

Poiché per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado n ammette al più n soluzioni reali, è possibile concludere che il polinomio P(x) è identicamente nullo, per cui risulta

$$P_1(x) = P_2(x).$$

L'esistenza del polinomio si prova attraverso la sua costruzione.

Dati i punti $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, il polinomio interpolatore dei due punti è

$$P(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Si verifica infatti che $P(x_0) = y_0$ e $P(x_1) = y_1$.

Nel caso generale di n + 1 coppie di punti si scriverà

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} y_1 + \dots$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})} y_n$$

ESEMPIO 3

Determinare il polinomio interpolante di Lagrange per le coppie di valori

x	1	2	3	4
y	6	2	4	15

$$y = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}\,6 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}\,2 + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}\,4 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}\,15$$

Svolgendo i calcoli, si trova il polinomio interpolante

$$y = \frac{x^3 - 15x + 26}{2}.$$

~~~~~

Si assegnerà il seguente esercizio.

Data la seguente tabella di valori, determinare f(3) applicando il metodo di Lagrange.

x	2	4	5
y	3	7	9

≈≈≈≈≈

La quarta lezione sarà dedicata alla

Interpolazione con il metodo di Newton.

Varie sono le formule di polinomi interpolanti di Newton. Quella più generale è data dal polinomio interpolante di Newton alle differenze divise.

Si considerino n + 1 coppie di punti

$$(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n),$$

le cui ascisse, per semplicità, siano ordinate, ad esempio in senso crescente. Supponiamo dunque che $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Il polinomio interpolante P(x), con $P(x_i) = y_i$ per i = 0, …, n, abbia la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Osserviamo che il grado di P(x) è uguale a n. Poiché

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ \dots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$$

osservando che tale sistema è un sistema di n + 1 equazioni in n + 1 incognite, esso ammette una sola soluzione, per cui

$a_0 = y_0$

$a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{} := f[x_0, x_1]$, detta *differenza divisa prima*.
~~~~~

$x_1 - x_0 \qquad x_1 - x_0$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{1}{(x_2 - x_1)} \left[\frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \right] =$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1} \left[f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1] \right] =$$

$$= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = f[x_0, x_1, x_2].$$

È possibile provare che

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$$ detta *seconda differenza divisa*.

Per ricorrenza, quindi, per i = 0, 1, 2, …

$$a_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_i] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}.$$

Si darà, a questo punto, lo schema dell'algoritmo per i = 0, 1, 2.

	$i = 0$	1	2
x_0	$y_0 = f(x_0)$		
		$f[x_0, x_1]$	
x_1	$y_1 = f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$
		$f[x_1, x_2]$	
x_2	$y_2 = f(x_2)$		

Ovviamente lo schema può essere generalizzato per i = 0, …, n.

Il polinomio interpolante di Newton è dunque

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

~~~~~

ESEMPIO 4

Con i dati dell'esempio 3, determinare il polinomio interpolante di Newton alle differenze divise.

Il polinomio è dato da:

$$y = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 2) + a_3(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Calcoliamo i coefficienti: $a_0 = 6$. Le differenze divise del primo ordine sono:

$$a_1 = (2 - 6) / (2 - 1) = -4,$$
~~~~~

$$a_2 = [(4 - 6) / (2*1)] - [(2 - 6) / (1*1)] = +3,$$

$$a_3 = [(9/2) - 3] / (4 - 1) = 1 / 2.$$

Si ottiene così il polinomio interpolante di Newton:

$$y = 6 - 4(x - 1) + 3(x - 1)(x - 2) + ½(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

e, svolgendo i calcoli, si ha:

$$y = 13 - (15/2)x + ½x^3.$$

~~~~~

Si assegnerà il seguente esercizio.

Determinare il polinomio interpolante ed i valori della seguente tabella, applicando la formula di Lagrange e la formula di Newton alle differenze divise:

x	0	1	2	3
y	2	3	5	5

≈≈≈≈≈

Nel corso dell'ultima lezione si farà osservare che, se i punti x_i sono equintervallati da una quantità h, cioè se sono date le n + 1 ascisse

$$x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad \ldots, \quad x_0 + nh,$$

a cui corrispondono le ordinate

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_n,$$

la funzione interpolante che si ottiene è data dal seguente polinomio di grado n

$$P(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2\,!} +$$

$$+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots +$$

$$+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\ldots\left(\frac{x - x_0}{h} - n + 1\right)\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

dove, per ricorrenza,

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ (per $i \le n - 1$)

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ (per $i \le n - 2$)

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_1$ (per $i \le n - 3$)

……

$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$

~~~~~

In laboratorio si mostrerà, attraverso l'uso di un foglio Excel, il seguente

ESEMPIO 5

Calcolare il polinomio di interpolazione per la funzione y = logx nell'intervallo [10, 12] prendendo h = 0,5.

Costruiamo la tabella dei valori delle coppie x_i, y_i.

h = 0,5

x	y	deltay	delta^2y	delta^3y
10	1,00000	0,02119	-0,00099	0,00009
10,5	1,02119	0,02020	-0,00090	0,00008
11	1,04139	0,01931	-0,00082	
11,5	1,06070	0,01848		
12	1,07918			

Cella	Funzione	Formula Excel
A6	x + h	=A5 + $B$2
B5	$\log_{10}x$	=LOG10(A5)
C5	Δy	=B6 – B5
D5	$\Delta^2 y$	=C6 – C5
E5	$\Delta^3 y$	=D6 – D5

La funzione interpolante assume quindi la seguente espressione:

$$P(x) = 1 + \frac{x-10}{0,5}\,0,02119 + \frac{x-10}{0,5}\left(\frac{x-10}{0,5} - 1\right)\frac{0,00099}{2!} +$$

$$+ \frac{x-10}{0,5}\left(\frac{x-10}{0,5} - 1\right)\left(\frac{x-10}{0,5} - 2\right)\frac{0,00009}{3!}.$$

~~~~~

Si assegneranno poi i seguenti esercizi

Calcolare i polinomi interpolanti, con i metodi studiati, delle seguenti funzioni nell'intervallo a fianco indicato, prendendo h = 0,5:

1. y = logx [8, 10]
2. $y = \sqrt{(x + 1)}$ [3, 5]
3. $y = \sqrt[3]{x}$ [2, 4]

≈≈≈≈≈

VERIFICA E VALUTAZIONE
~~~~~

Al fine di verificare e valutare il raggiungimento degli obiettivi, al termine della trattazione degli argomenti dell'unità, si farà svolgere un compito in classe. La valutazione finale sarà stabilita tenendo conto anche dei risultati conseguiti nelle verifiche orali e di fattori quali l'impegno, l'interesse e la partecipazione mostrati.

In particolare, per verificare il conseguimento dell'obiettivo 1 si chiederà all'allievo di spiegare quando e perché è necessario far uso dei metodi di interpolazione. Per verificare il conseguimento dell'obiettivo 2, gli si chiederà di ricostruire le formule dei polinomi interpolanti studiati. Per verificare il conseguimento degli obiettivi 3 e 4, si chiederà di svolgere dei problemi fornendo dati differenti.

Volendo valutare le capacità di percezione, cognizione, riflessione, elaborazione ed applicazione, si farà riferimento alla griglia di valutazione dell'unità didattica precedente.